令和６年度　　前期日程
入学者選抜学力検査問題　　**数　　　学**

〔注　意〕

1　机上に受験票を提示しておくこと。

2　監督者の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけない。

3　**生命化学科，森林科学科を受験する者は問題$\boxed{1}$～$\boxed{3}$を，理工情報学科を受験する者は問題$\boxed{4}$～$\boxed{7}$を解くこと。**指定されていない問題を解いた答案は無効となる場合がある。

4　解答にあたっては，必ず問題番号ごとに，解答用紙の指定された箇所に記入すること。

5　該当する解答用紙に受験番号・氏名を必ず記入すること。受験番号・氏名が記載されていない答案は無効となる場合がある。

6　この冊子の問題は７ページからなっている。

7　解答用紙は７枚ある。

8　下書き用紙は４枚ある。

9　この問題冊子のうち，落丁・乱丁，印刷不鮮明な箇所があれば，手をあげて申し出ること。

10　試験時間中の退室は認めない。

11　解答用紙は持ち帰ってはいけない。

12　問題冊子と下書き用紙は，持ち帰ること。

$\boxed{1}$　$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ を自然数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $a,\ b$ が $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6}$ を満たすとき，$a+b$ の最大値を求めよ．

(2) $c,\ d$ が $2c+3d=57$ を満たすとき，cd の最大値を求めよ．

(3) e^2+f^2 が 7 の倍数ならば，$e,\ f$ はともに 7 の倍数であることを示せ．

(配点 60 点)

2 図1のように，底面が半径 a の円で高さが b の直円錐に内接する直円柱 C_1 を考える．C_1 の底面の半径を r_1 $(0 < r_1 < a)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) C_1 の体積が最大となるとき，$r_1 = \dfrac{2}{3}a$ となることを示せ．

(2) 図2のように底面が半径 r_1 の円で高さが b' の直円錐に内接する直円柱 C_2 を考える．C_1 と C_2 の体積の和が最大となるときの r_1 を，a を用いて表せ．

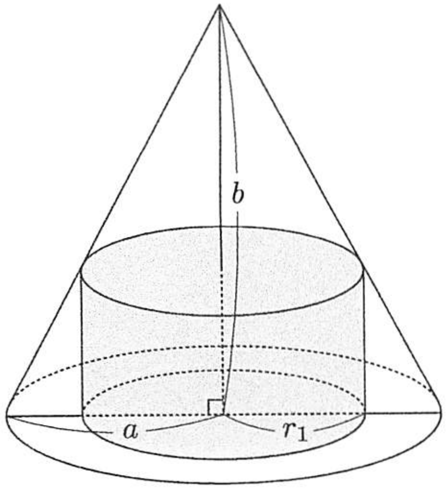

図1

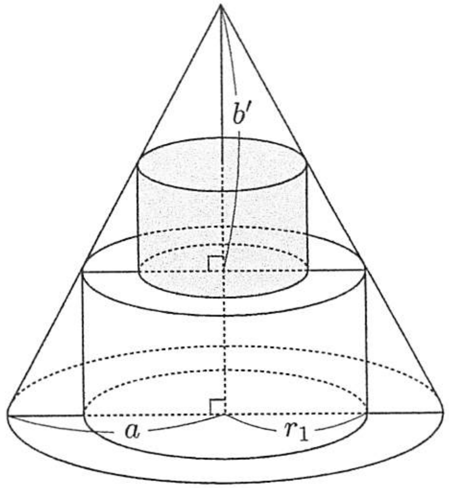

図2

(配点 70 点)

$\boxed{3}$ $p,\ q$ を実数とする．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 4$$
$$3S_n = pa_n - 12 + 8n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1 = 4$$
$$b_{n+1} - b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k (q-1)^k \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) p の値を求め，数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式で表せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を n と q の式で表せ．

(3) $a_n = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つとき，q の値を求めよ．

(配点 70 点)

$\boxed{4}$ a, b を実数とする．関数 $f(x) = a\sin^5 x + b\sin^3 x + 5\sin x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \dfrac{a}{16}\sin 5x - \dfrac{5a+4b}{16}\sin 3x + \dfrac{5a+6b+40}{8}\sin x$ が成り立つことを示せ．

(2) $a \fallingdotseq 16$ または $b \fallingdotseq -20$ ならば $f(x)$ の周期が $\dfrac{2}{5}\pi$ にならないことを示せ．

(配点 100 点)

$\boxed{5}$　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $n^2 - 1 < 2^n$ $(n = 4, 5, 6, \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(2) $2 < a_{2000} < 3$ であることを示せ．

(配点 100 点)

$\boxed{6}$ $a>0$ とする．座標平面上において，$\triangle$OAB の辺 AB を $1:a$ の比に内分する点を C とする．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OC 上に点 P がある．直線 AP と辺 OB との交点を D とする．$\mathrm{OP}:\mathrm{PC}=2:a$ を満たすとき，$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}$ を a を用いて表せ．

(2) 点 Q が $a\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}+(a+1)\overrightarrow{\mathrm{QO}}=\vec{0}$ を満たすものとする．$\mathrm{OQ}:\mathrm{QC}$ を求めよ．

(3) 点 R が $a\overrightarrow{\mathrm{RA}}+\overrightarrow{\mathrm{RB}}+(a+1)\overrightarrow{\mathrm{RO}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たすものとする．実数 k が $-a<k<1$ の範囲で動くとき，R の軌跡を求めよ．

(配点 100 点)

$\boxed{7}$ 2つの曲線 $C_1 : y = xe^{-x}$，$C_2 : y = xe^{-x}\sin x$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 2つの不定積分 $\displaystyle\int e^{-x}\sin x dx$，$\displaystyle\int e^{-x}\cos x dx$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-x}\sin x dx$ を求めよ．

(3) $0 \leqq x \leqq 3\pi$ において，C_1 と C_2 は3つの異なる共有点を持つ．この共有点のうち，C_1 と C_2 が接する点の座標を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq 3\pi$ において，C_1, C_2 で囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ．

(配点 100 点)