令和６年度　京都府立大学　一般選抜試験（前期日程）

入学者選抜学力検査「数　学」（生命化学科・森林科学科）

○解答例

1

（1）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$ より　$ab=6a+6b$

よって，（$a-6$）（$b-6$）＝36

a，bは自然数であるから，$a-6$，$b-6$は－５以上の整数であり，

（$a-6$，$b-6$）＝（1，36），（2，18），（3，12），（4，9），（6，6），（9，4），（12，3），（18，2），（36，1）

よって（a，b）＝（7，42），（8，24），（9，18），（10，15），（12，12），（15，10），（18，9），（24，8），（42，7）

したがって，$a+b$は（a，b）の組が（7，42）と（42，7）のとき最大となり，そのときの$a+b$の値は 49

（2）$2c+3d=57$を変形して，$2c=3$（$19-d$）

右辺は３の倍数なので，左辺の$2c$も３の倍数であり，２と３は互いに素であるからcは３の倍数である．

よって，$c=3n$（nは自然数）

これを$2c=3$（$19-d$）の式に代入して，

$d=19-2n$

$cd=3n$（$19-2n$）

c，dはともに自然数なので，自然数nの範囲は$n=1$，2，3，…，9

$n=1$のとき，$cd=3$（$19-2$）$=51$

$n=2$のとき，$cd=3\cdot2$（$19-2\cdot2$）$=90$

$n=3$のとき，$cd=3\cdot3$（$19-2\cdot3$）$=117$

$n=4$のとき，$cd=3\cdot4$（$19-2\cdot4$）$=132$

$n=5$のとき，$cd=3\cdot5$（$19-2\cdot5$）$=135$

$n=6$のとき，$cd=3\cdot6$（$19-2\cdot6$）$=126$

$n=7$のとき，$cd=3\cdot7$（$19-2\cdot7$）$=105$

$n=8$のとき，$cd=3\cdot8$（$19-2\cdot8$）$=72$

$n=9$のとき，$cd=3\cdot9$（$19-2\cdot9$）$=27$

よって，cdの最大値は$n=5$のとき 135

（3）まずeを７で割ったときの余りで分類する．

eを７で割った余りが 0，1，2，3，4，5，6 のとき，e^2を７で割った余りは，

$e=7k_1$（$k_1=1$，2，3，…）のとき，

$e^2=(7k_1)^2=7$（$7k_1^2$）

$e=7k_2+1$（$k_2=0$，1，2，3，…）のとき，

$e^2=(7k_2+1)^2=7$（$7k_2^2+2k_2$）$+1$

$e=7k_3+2$（$k_3=0$，1，2，3，…）のとき，

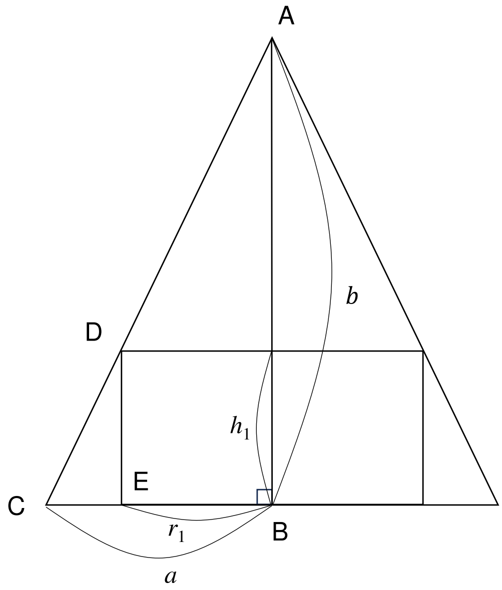
$e^2=(7k_3+2)^2=7(7k_3{}^2+4k_3)+4$
$e=7k_4+3$（$k_4=0$，1，2，3，…）のとき，
$e^2=(7k_4+3)^2=7(7k_4{}^2+6k_4+1)+2$
$e=7k_5+4$（$k_5=0$，1，2，3，…）のとき，
$e^2=(7k_5+4)^2=7(7k_5{}^2+8k_5+2)+2$
$e=7k_6+5$（$k_6=0$，1，2，3，…）のとき，
$e^2=(7k_6+5)^2=7(7k_6{}^2+10k_6+3)+4$
$e=7k_7+6$（$k_7=0$，1，2，3，…）のとき，
$e^2=(7k_7+6)^2=7(7k_7{}^2+12k_7+5)+1$
よって，e^2を 7 で割った余りは 0，1，2，4 のいずれかとなる．
これはf^2も同様となる．
このとき，e^2+f^2が 7 で割り切れる場合は，e^2を 7 で割った余りとf^2を 7 で割った余りの和が 0，あるいは 7 で割り切れる場合となる．しかし，余りの和が 7 で割り切れることはない．
したがって，e^2+f^2が 7 で割り切れるときは，e^2を 7 で割った余りとf^2を 7 で割った余りの和が 0 のとき，つまりe^2，f^2を 7 で割った余りがともに 0 のときのみであり，このときe^2，f^2はともに 7 の倍数である．
このとき，e，fはともに 7 の倍数である．

よって，e^2+f^2が 7 の倍数ならば，e，fはともに 7 の倍数である．

2

(1)

右図のように，直円錐を頂点 A と底面の中心 B を通るように切断した際の切断面を考える．



C_1 の高さを h_1 とすると，△ABC と△DEC の相似関係より，

$h_1 : (a - r_1) = b : a$

従って，$a > 0$なので，

$$h_1 = \frac{b(a - r_1)}{a}$$

C_1 の体積を V_{C1} とすると，

$$V_{c1}(r_1) = \pi {r_1}^2 \cdot \frac{b(a - r_1)}{a} \qquad (0 < r_1 < a)$$

$$= \pi b {r_1}^2 - \frac{b\pi}{a} {r_1}^3$$

V_{C1} を r_1 について微分すると，

$$V_{c1}'(r_1) = 2\pi b r_1 - \frac{3b\pi}{a} {r_1}^2 \qquad (0 < r_1 < a)$$

$V_{c1}'(r_1) = 0$とすると，$0 < r_1 < a$ なので $r_1 = \frac{2}{3}a$

$0 < r_1 < a$ における$V_{c1}(r_1)$の増減表は，

r_1	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$V_{c1}'(r_1)$	$+$	0	$-$
$V_{c1}(r_1)$	↗	$V_{c1}\left(\frac{2}{3}a\right)$ 極大	↘

よって，$r_1 = \frac{2}{3}a$　のとき C_1 の体積が最大になる．

(2)

C_2 の高さと半径をそれぞれ h_2, r_2 とする．(1)の直円柱の体積が最大になるときの直円錐の底面の半径と直円柱の底面の半径の関係は，一般の直円錐について成立する．よって，任意の C_1 について C_2 の体積が最大になるとき, $r_2 = \frac{2}{3}r_1$である．またそのとき，(1)と同様に

相似関係を用いると， $h_2 = \frac{r_1 b}{3a}$ である．

C_2 の体積を V_{C2} とすると，

$$V_{c2}(r_1) = \left(\frac{2r_1}{3}\right)^2 \pi \frac{r_1 b}{3a} = \frac{4b\pi}{27a} {r_1}^3 \quad (0 < r_1 < a)$$

C_1 と C_2 の体積の合計を V_2 とすると，

$$V_2(r_1) = V_{c1}(r_1) + V_{c2}(r_1)$$

$$= \pi b {r_1}^2 - \frac{b\pi}{a} {r_1}^3 + \frac{4b\pi}{27a} {r_1}^3 = \pi b {r_1}^2 - \frac{23b\pi}{27a} {r_1}^3 \quad (0 < r_1 < a)$$

V_2 を r_1 について微分すると，

$$V_2{}'(r_1) = 2\pi b r_1 - \frac{23b\pi}{9a} {r_1}^2 \quad (0 < r_1 < a)$$

$V_2{}'(r_1) = 0$ とすると，$0 < r_1 < a$なので $r_1 = \frac{18}{23}a$

$0 < r_1 < a$ における$V_2(r_1)$の増減表は，

r_1	$\cdots$	$\frac{18}{23}a$	$\cdots$
$V_2{}'(r_1)$	$+$	0	$-$
$V_2(r_1)$	$\nearrow$	$V_2\left(\frac{18}{23}a\right)$ 極大	$\searrow$

よって，$r_1 = \frac{18}{23}a$　のとき C_1 と C_2 の体積の和が最大になる．

$\boxed{3}$ (1)

$3S_n = pa_n - 12 + 8n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ ・・・(a)
とする．

題意より，(a)式は$n = 1$のときにも成立するので，

$3S_1 = 3a_1 = pa_1 - 12 + 8 \times 1 = pa_1 - 4$
$(p - 3)a_1 = 4$
よって$a_1 = 4$ を満たすには，$p = 4$ である必要がある．

$p = 4$ を(a)式に代入すると，
$3S_n = 4a_n - 12 + 8n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ ・・・(a')
$n \geq 2$ のとき，
$3a_n = 3(S_n - S_{n-1}) = 4(a_n - a_{n-1}) + 8$
$a_n = 4a_{n-1} - 8$
これは，

$a_n - \frac{8}{3} = 4\left(a_{n-1} - \frac{8}{3}\right) \quad (n \geq 2)$

と書ける．
ここで$a_1 = 4$より，$a_1 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$ だから，
$a_n - \frac{8}{3}$は，初項$\frac{4}{3}$，公比 4 の等比数列である．従って，
$a_n - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}4^{n-1} \quad (n \geq 2)$
よって，$a_n = \frac{4}{3}4^{n-1} + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}4^n + \frac{8}{3} \quad (n \geq 2)$
この式に$n = 1$を代入すると，
$a_1 = \frac{1}{3}4^1 + \frac{8}{3} = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$
よって$n = 1$のときも成り立つ．

以上より求めるpは4で，数列$\{a_n\}$の一般項a_nは，
$a_n = \frac{1}{3}4^n + \frac{8}{3}$ ・・・(a'')

(2)

二項定理より，

$$1 + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k(q-1)^k = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(q-1)^k = \{1 + (q-1)\}^n = q^n$$

従って，
$b_{n+1} - b_n = q^n$ ・・・(b)

ここで$n \geq 2$のとき，$k = 1$から$n - 1$まで，$b_{k+1} - b_k$を足すと，

$$b_n - b_1 = \sum_{k=1}^{n-1} q^k \qquad (n \geq 2)$$

i) $q \neq 1$ のとき

等比級数の公式から,

$$b_n = \frac{q(q^{n-1}-1)}{q-1} + 4 = \frac{q}{q-1}q^{n-1} + \frac{-q+4q-4}{q-1} = \frac{q}{q-1}q^{n-1} + \frac{3q-4}{q-1} \quad (n \geq 2)$$

この式に$n=1$を代入すると,

$$b_n = \frac{q}{q-1}q^{1-1} + \frac{3q-4}{q-1} = \frac{q}{q-1} + \frac{3q-4}{q-1} = \frac{4q-4}{q-1} = 4$$

よって$n=1$のときも成り立つ.

以上より, $q \neq 1$ のとき

$$b_n = \frac{q}{q-1}q^{n-1} + \frac{3q-4}{q-1}$$

ii) $q = 1$ のとき

$b_n - b_1 = n - 1 \quad (n \geq 2)$

$b_n = n + 3 \ (n \geq 2)$

$b_1 = 4$なので, この式は$n=1$のときも成り立つ.

以上より数列$\{b_n\}$の一般項は,

$$\begin{cases} b_n = \dfrac{q}{q-1}q^{n-1} + \dfrac{3q-4}{q-1} & (q \neq 1\text{のとき}) \\ b_n = n + 3 & (q = 1\text{のとき}) \end{cases}$$

(3)

題意より $a_1 = b_1 = 4$ であり, 数列$\{a_n\}$と数列$\{b_n\}$の初項は等しい.

従って $n = 1, 2, 3, \cdots$ において, (a'')式を満たすa_nが,

$a_{n+1} - a_n = q^n$

を満たすとき, a_nはb_nの条件を満たし, 両者は等しくなる.

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{3}4^{n+1} + \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}4^n + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}4^n(4-1) = 4^n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

従って,

$q^n = 4^n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

すなわち,

$$\left(\frac{q}{4}\right)^n = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つとき, $a_n = b_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$となる.

これを満たすqは 4 のみ.

以上より求めるqの値は4.

○解答例及び配点

$\boxed{4}$　100 点 【(1) 50 点 (2) 50 点】

(1) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \ \cdots$ ①

① と $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ を踏まえると

$$\begin{aligned}\sin 5x &= \sin(3x + 2x) = \sin 3x\cos 2x + \cos 3x\sin 2x \\ &= (3\sin x - 4\sin^3 x)(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x\cos x(4\cos^3 x - 3\cos x) \\ &= (3\sin x - 4\sin^3 x)(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x\cos^2 x(4\cos^2 x - 3) \\ &= (3\sin x - 4\sin^3 x)(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x(1 - \sin^2 x)(1 - 4\sin^2 x) \\ &= 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x \ \cdots ②\end{aligned}$$

$g(x) = \dfrac{a}{16}\sin 5x - \dfrac{5a+4b}{16}\sin 3x + \dfrac{5a+6b+40}{8}\sin x$ とおくと

①, ② より $g(x) = \dfrac{a}{16}(16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x) - \dfrac{5a+4b}{16}(3\sin x - 4\sin^3 x) + \dfrac{5a+6b+40}{8}\sin x$

$= a\sin^5 x + b\sin^3 x + 5\sin x$

$= f(x)$

よって $f(x) = \dfrac{a}{16}\sin 5x - \dfrac{5a+4b}{16}\sin 3x + \dfrac{5a+6b+40}{8}\sin x$ が成り立つ　(証明終わり)

(2) $f(x)$ の周期が $\dfrac{2}{5}\pi$ ならば $a = 16$, $b = -20$ となることを示せばよい

$p = \dfrac{1}{16}a$, $q = -\dfrac{5}{16}a - \dfrac{1}{4}b$, $r = \dfrac{5}{8}a + \dfrac{3}{4}b + 5$ とおくと

題意より $f\left(\dfrac{2}{5}\pi\right) = f(0)$ なので $q\sin\dfrac{6}{5}\pi + r\sin\dfrac{2}{5}\pi = 0 \ \cdots$ ③

また $f'\left(\dfrac{2}{5}\pi\right) = f'(0)$ なので $f'(x) = 5p\cos 5x + 3q\cos 3x + r\cos x$ を踏まえると

$3q\cos\dfrac{6}{5}\pi + r\cos\dfrac{2}{5}\pi = 3q + r \ \cdots$ ④

③, ④ より $q\left(3\sin\dfrac{2}{5}\pi\cos\dfrac{6}{5}\pi - \sin\dfrac{6}{5}\pi\cos\dfrac{2}{5}\pi\right) = q\left(3\sin\dfrac{2}{5}\pi - \sin\dfrac{6}{5}\pi\right) \ \cdots$ ⑤

⑤ において $q \neq 0$ と仮定すると $3\sin\dfrac{2}{5}\pi\left(1 - \cos\dfrac{6}{5}\pi\right) = \sin\dfrac{6}{5}\pi\left(1 - \cos\dfrac{2}{5}\pi\right)$ となるが

$\sin\dfrac{2}{5}\pi\left(1 - \cos\dfrac{6}{5}\pi\right) > 0$, $\sin\dfrac{6}{5}\pi\left(1 - \cos\dfrac{2}{5}\pi\right) < 0$ なので矛盾

よって $q = 0 \ \cdots$ ⑥

③, ⑥ より $r = 0 \ \cdots$ ⑦

(1) の結果と ⑥, ⑦ より $a = 16$, $b = -20$

ゆえに $a \neq 16$, $b \neq -20$ ならば $f(x)$ の周期が $\dfrac{2}{5}\pi$ にならない　(証明終わり)

$\boxed{5}$ 100点 【(1) 40点 (2) 60点】

(1) ⅰ $n=4$ のとき $n^2-1=15,\ 2^n=16$ なので $n^2-1<2^n$ は成り立つ

ⅱ $n=k$ のとき $n^2-1<2^n$ は成り立つと仮定すると $k^2-1<2^k$ $\cdots$ ①

$k \geqq 4$ を踏まえると ① より $2^{k+1}-\{(k+1)^2-1\}=2\cdot 2^k-k^2-2k>(k-1)^2-3 \geqq 6>0$ なので $(k+1)^2-1<2^{k+1}$

ⅰ, ⅱ より数学的帰納法を用いると $n^2-1<2^n$ $(n=4,5,6,\cdots)$ (証明終わり)

(2) 明らかに $a_{n+1}>a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ $\cdots$ ②

$a_2=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{15}{8},\ a_3=\dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{15}{8}=\dfrac{135}{64}>2$ $\cdots$ ③

②, ③ より $a_{2000}>a_3>2$ $\cdots$ ④

(1) の不等式を用いると

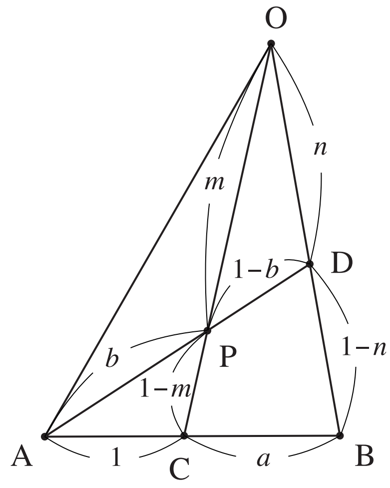
$$a_{2000}<\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\left(1+\frac{1}{4^2-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5^2-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6^2-1}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{1998^2-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{1999^2-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2000^2-1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdots\cdots\frac{1998^2}{1997\cdot 1999}\cdot\frac{1999^2}{1998\cdot 2000}\cdot\frac{2000^2}{1999\cdot 2001}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2000}{2001}<\frac{45}{16}<3 \quad \cdots ⑤$$

④, ⑤ より $2<a_{2000}<3$ (証明終わり)

$\boxed{6}$　100 点　【(1) 30 点　(2) 30 点　(3) 40 点】



(1) OP : PC= $m : (1-m)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $\cdots$ ①

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{a}{a+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1}{a+1}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $\cdots$ ②

①, ② より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{ma}{a+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{m}{a+1}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $\cdots$ ③

OD : DB= $n : (1-n)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $\cdots$ ④

AP : PD= $b : (1-b)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-b)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ $\cdots$ ⑤

④, ⑤ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-b)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + nb\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $\cdots$ ⑥

よって ③, ⑥ より $\dfrac{ma}{a+1} = 1-b$ なので $m = \dfrac{(a+1)(1-b)}{a}$

ゆえに OP : PC= $m : (1-m) = \dfrac{(a+1)(1-b)}{a} : 1 - \dfrac{(a+1)(1-b)}{a}$

OP : PC= $2 : a$ であることを踏まえると

$\dfrac{(a+1)(1-b)}{a} : 1 - \dfrac{(a+1)(1-b)}{a} = 2 : a$ が成り立つので $b = 1 - \dfrac{2a}{(a+1)(a+2)}$

したがって AP : PD= $b : (1-b) = a^2 + a + 2 : 2a$ $\cdots$ (答)

(2) $a\overrightarrow{\mathrm{QA}} + \overrightarrow{\mathrm{QB}} + (a+1)\overrightarrow{\mathrm{QO}} = \vec{0}$ より $\overrightarrow{\mathrm{QO}} = -\dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{QA}} + \overrightarrow{\mathrm{QB}}}{a+1}$ $\cdots$ ⑦

$\overrightarrow{\mathrm{QC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{QA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QB}}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{QC}} = \dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{QA}} + \overrightarrow{\mathrm{QB}}}{a+1}$ $\cdots$ ⑧

⑦, ⑧ より $\overrightarrow{\mathrm{QO}} = -\overrightarrow{\mathrm{QC}}$

よって Q は線分 OC の中点なので OQ : QC= $1 : 1$ $\cdots$ (答)

(3) $a\overrightarrow{\mathrm{RA}} + \overrightarrow{\mathrm{RB}} + (a+1)\overrightarrow{\mathrm{RO}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{RB}} - \overrightarrow{\mathrm{RA}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{RO}} = -\dfrac{(a+k)\overrightarrow{\mathrm{RA}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{RB}}}{a+1}$ $\cdots$ ⑨

線分 AB を $(1-k) : (a+k)$ に内分する点を G とすると

$\overrightarrow{\mathrm{RG}} = \dfrac{(a+k)\overrightarrow{\mathrm{RA}} + (1-k)\overrightarrow{\mathrm{RB}}}{a+1}$ $\cdots$ ⑩

⑨, ⑩ より $\overrightarrow{\mathrm{RO}} = -\overrightarrow{\mathrm{RG}}$

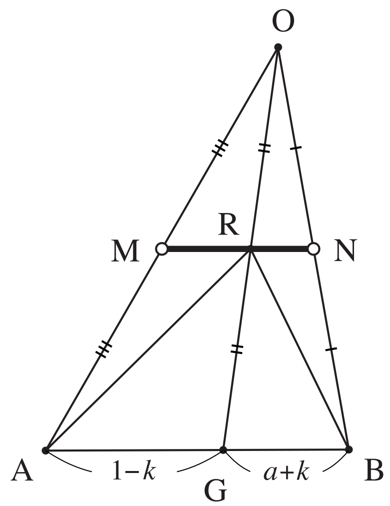
よって R は線分 OG の中点

$-a < k < 1$ より $1-k > 0,\ a+k > 0$ なので

G の軌跡は両端を除く線分 AB

ゆえに線分 OA の中点を M, 線分 OB の中点を N とすると

R の軌跡は両端を除く線分 MN $\cdots$ (答)



$\boxed{7}$　100 点　【(1) 20 点　(2) 20 点　(3) 30 点　(4) 30 点】

(1) $I = \displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx$ とおくと

$$I = \int (-e^{-x})'\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\sin x + \int (-e^{-x})'\cos x\,dx$$
$$= -e^{-x}(\sin x + \cos x) - I$$

よって $\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + c_1$ (c_1 は積分定数) $\cdots$ (答)

$J = \displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$ とおくと

$$J = \int (-e^{-x})'\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int (-e^{-x})'\sin x\,dx$$
$$= e^{-x}(\sin x - \cos x) - J$$

よって $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + c_2$ (c_2 は積分定数) $\cdots$ (答)

(2) $$\int xe^{-x}\sin x\,dx = \int x\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\right\}'dx$$
$$= -\frac{1}{2}xe^{-x}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}\left(\int e^{-x}\sin x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx\right)$$

よって (1) の結果を用いると

$$\int xe^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-x}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)\right\} + c_3$$
$$= -\frac{1}{2}xe^{-x}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}e^{-x}\cos x + c_3$$ (c_3 は積分定数) $\cdots$ (答)

(3) $f(x) = xe^{-x},\ g(x) = xe^{-x}\sin x$ とおく

$0 \leqq x \leqq 3\pi$ において C_1 と C_2 が接する点の座標を (p, q) とすると

$q = f(p),\ q = g(p)$ より $f(p) = g(p)$ なので $pe^{-p}(1 - \sin p) = 0$

よって $e^{-p} > 0$ より $p = 0,\ \sin p = 1$ なので $p = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{2}\pi$

さらに C_1 と C_2 の点 (p, q) における接線の傾きは等しいので $f'(p) = g'(p)$ $\cdots$ ①

$f'(p) = (1 - p)e^{-p},\ \ g'(p) = (1 - p)e^{-p}\sin p + pe^{-p}\cos p$ なので

$p = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{2}\pi$ のとき

$$\begin{cases} f'(0) = 1,\ \ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \left(1 - \dfrac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}},\ \ f'\left(\dfrac{5}{2}\pi\right) = \left(1 - \dfrac{5}{2}\pi\right)e^{-\frac{5}{2}\pi}, \\ g'(0) = 0,\ \ g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \left(1 - \dfrac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}},\ \ g'\left(\dfrac{5}{2}\pi\right) = \left(1 - \dfrac{5}{2}\pi\right)e^{-\frac{5}{2}\pi} \end{cases} \cdots ②$$

よって ①, ② より題意を満たすのは $p = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{2}\pi$ の場合なので

C_1 と C_2 が接する点の座標は $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}\right),\ \left(\dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi e^{-\frac{5}{2}\pi}\right)$ $\cdots$ (答)

(4) (3) の結果より $0 \leqq x \leqq 3\pi$ における C_1 と C_2 の共有点の座標は $(0, 0),\ \left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}\right),\ \left(\dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi e^{-\frac{5}{2}\pi}\right)$

$0 \leqq x \leqq 3\pi$ において $xe^{-x} \geqq xe^{-x}\sin x$ なので

(2) の結果を用いると C_1, C_2 で囲まれた 2 つの部分の面積の和は

$$\int_0^{\frac{5}{2}\pi}(xe^{-x} - xe^{-x}\sin x)\,dx = \Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_0^{\frac{5}{2}\pi} - \left[-\frac{1}{2}xe^{-x}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}e^{-x}\cos x\right]_0^{\frac{5}{2}\pi}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-\frac{5}{2}\pi}(5\pi + 4)$$ $\cdots$ (答)