令和4年度　前期日程　入学者選抜学力検査問題
環境・情報科学科　数学　解答例

1

(1)

$5^{\frac{2}{3}}$が有理数であると仮定すると，

$$5^{\frac{2}{3}}=\frac{p}{q}\ (p,q\text{は 1 以外の公約数をもたない自然数})$$

と表せ，

$$5^{\frac{2}{3}}q=p\ \cdots①$$

①式の両辺を 3 乗して，

$$5^2q^3=p^3\ \cdots①'$$

よって，①'式の右辺は 5 の倍数である．また，①'式の右辺は自然数pのみの積であるので，pは 5 の倍数である．ゆえに，

$$p=5p'\quad (p'\text{は自然数})$$

と表せ，①'に代入して

$$5^2q^3=(5p')^3$$

すなわち，

$$q^3=5p'^3$$

よって，上記のp同様，qは 5 の倍数である．このとき，pとqはいずれも 5 の倍数であり，p，qは 1 以外の公約数をもたない自然数であることに矛盾する．したがって，$5^{\frac{2}{3}}$が有理数である，という仮定は誤りである．ゆえに，$5^{\frac{2}{3}}$は無理数である．（証明終わり）

(2)

$\sqrt{3}$は無理数である．$\sqrt[3]{13}-\sqrt{3}$が有理数であると仮定すると，

$\sqrt[3]{13}-\sqrt{3}=\frac{b}{a}$（$a$，$b$ は 1 以外の公約数をもたない自然数）

と表せ，整理すると，

$\sqrt[3]{13}a=b+\sqrt{3}a$

両辺を 3 乗して，整理すると，

$$\sqrt{3}=\frac{13a^3-b^3-9a^2b}{3a(a^2+b^2)}$$

となり，右辺の分母および分子が整数なので，右辺は有理数となり，$\sqrt{3}$が無理数であることに矛盾する．したがって，$\sqrt[3]{13}-\sqrt{3}$が有理数である，という仮定は誤りである．ゆえに，$\sqrt[3]{13}-\sqrt{3}$は無理数である．（証明終わり）

(3)

nが 30 と互いに素であるとき, 2, 3, 5 のすべてと互いに素である．nを 30 で割った商をr，余りをsとすると，

$n=30r+s\cdots②$

とおける．ここで，rは非負の整数，sは 29 以下の非負の整数.

②と題意より，sは 2, 3, 5 のすべてと互いに素である．

このため，sは，1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 のいずれかである．
$S_1=\{1,7,13,19\}$，$S_2=\{11,17,23,29\}$ とおくと，sは，S_1またはS_2の要素となる．
i) $s\in S_1$のとき
$s=6k_1+1$…③ $(k_1=0,1,2,3)$
とおける．
②，③より，$n^2=(30r+s)^2=(30r+6k_1+1)^2=12\{3(5r+k_1)^2+5r+k_1\}+1$
となり，n^2を 12 で割った余りは 1 である．
ii) $s\in S_2$のとき
$s=6k_2-1$…④ $(k_2=2,3,4,5)$
とおける．
②，④より，$n^2=(30r+s)^2=(30r+6k_2-1)^2=12\{3(5r+k_2)^2-5r-k_2\}+1$
となり，n^2を 12 で割った余りは 1 である．
i), ii)より，n^2を 12 で割った余りは 1 である．(証明終わり)

$\boxed{2}$

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n \quad \cdots ①$ とおくと $b_{n+1} = 2b_n + 3 \quad \cdots ②$

$c_n = b_{n+1} - b_n \quad \cdots ③$ とおくと $c_{n+1} = 2c_n \quad \cdots ④$

$a_1 = 1$ より $a_2 = 2,\ a_3 = 7$ なので $b_1 = a_2 - a_1 = 1,\ b_2 = a_3 - a_2 = 5$

よって $c_1 = b_2 - b_1 = 4 \quad \cdots ⑤$

ゆえに ④, ⑤ より $c_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad \cdots ⑥$

②, ③ より $c_n = b_n + 3$ なので ⑥ を踏まえると $b_n = 2^{n+1} - 3 \quad \cdots ⑦$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式と ① より $b_n = a_n + 3(n-1) \quad \cdots ⑧$

したがって ⑦, ⑧ より $a_n = 2^{n+1} - 3n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots$ (答)

(2) $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} r^n$ とおくと $\dfrac{dS_k}{dr} = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} nr^{n-1}$ なので $\displaystyle\lim_{k\to\infty} r\dfrac{dS_k}{dr} = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n \quad \cdots ⑨$

$S_k = \dfrac{r(1-r^k)}{1-r}$ なので $\dfrac{dS_k}{dr} = \dfrac{1 - r^k - (1-r)kr^k}{(1-r)^2}$ より $\displaystyle\lim_{k\to\infty} kr^k = 0$ を用いると $\displaystyle\lim_{k\to\infty} r\dfrac{dS_k}{dr} = \dfrac{r}{(1-r)^2} \quad \cdots ⑩$

⑨, ⑩ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \dfrac{r}{(1-r)^2}$ (証明終わり)

(3) (1) の結果より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1} - 3n) r^{n-1} = 4\sum_{n=1}^{\infty} (2r)^{n-1} - \dfrac{3}{r}\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$

よって (2) を踏まえると $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{n-1} = \dfrac{4}{1-2r} - \dfrac{3}{(1-r)^2} = \dfrac{1 - 2r + 4r^2}{(1-2r)(1-r)^2} \quad \cdots$ (答)

$\boxed{3}$

（1）平面 α の法線ベクトルを $\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)$ とする. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,2,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,0,3)$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より $n_y=\dfrac{1}{2}n_x$, $n_z=\dfrac{1}{3}n_x$. よって, $\vec{n}=k(6,3,2)$. $k\neq0$. α 上の点を $\mathrm{D}(x,y,z)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{n}=0$ より $6x+3y+2z-6=0$ …（答）

（2）球面の半径を r $(r>0)$ とすると，球面は xy 平面，yz 平面，zx 平面に接するので，中心座標は (r,r,r) . さらに平面 α との距離も r であることから $\dfrac{|6r+3r+2r-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=r$. ゆえに $|11r-6|=7r$, $11r-6=\pm7r$. $r=\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{2}$. したがって、$Q_1$ の球面の方程式は $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$，$Q_2$ の球面の方程式は $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$ …（答）

（3）C_1 の座標は $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，$\mathrm{C}_2$ の座標は $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ である.

直線 $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2$ 上の点を $\mathrm{E}(x,y,z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}_1}+m\overrightarrow{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}$, m は実数. ここで，$\overrightarrow{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}=\left(\dfrac{7}{6},\dfrac{7}{6},\dfrac{7}{6}\right)$.

点 $\mathrm{E}(x,y,z)$ が α 上の点であるとすると，$6\left(\dfrac{7}{6}m+\dfrac{1}{3}\right)+3\left(\dfrac{7}{6}m+\dfrac{1}{3}\right)+2\left(\dfrac{7}{6}m+\dfrac{1}{3}\right)-6=0$. ゆえに，

$m=\dfrac{2}{11}$. したがって，$(x,y,z)=\left(\dfrac{6}{11},\dfrac{6}{11},\dfrac{6}{11}\right)$ …（答）

（4）球面の中心を $\mathrm{F}(x,y,z)$，半径を R とすると，$|\overrightarrow{\mathrm{FA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{FB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{FC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{FO}}|^2=R^2$

よって，$(x-1)^2+y^2+z^2=R^2$ …①，$x^2+(y-2)^2+z^2=R^2$ …②，$x^2+y^2+(z-3)^2=R^2$ …③，$x^2+y^2+z^2=R^2$ …④

①,②,③,④より，$x=\dfrac{1}{2}$，$y=1$，$z=\dfrac{3}{2}$. $R^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{7}{2}$

よって，球面の方程式は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{7}{2}$ …（答）

$\boxed{4}$

(1)

$2xf(x)+7\int_2^x f(t)\,dt+\int_2^x tf'(t)\,dt=5x^3+6\int_1^2 t^3f(t)\,dt$ ⋯①, $x>0$ ⋯②

①の両辺をxで微分して整理すると，$xf'(x)+3f(x)=5x^2$ ⋯③

③の両辺にx^2をかけて整理すると，$\left(x^3f(x)\right)'=5x^4$ ⋯④ であるから，

$$x^3f(x)=\int 5x^4dx$$
$$=x^5+C \cdots⑤$$

Cは定数．②，⑤より，$f(x)=x^2+\frac{C}{x^3}$ ⋯⑥

①に$x=2$を代入して，右辺第 2 項の積分を⑥を用いて行い整理すると，

$f(2)=\frac{103+6C}{4}$ ⋯⑦ ，⑥に$x=2$を代入て，$f(2)=4+\frac{C}{8}$ ⋯⑧,

⑦，⑧より，$C=-\frac{174}{11}$ ⋯⑨をえる．

よって，⑥，⑨より，$f(x)=x^2-\frac{174}{11x^3}$ ⋯⑩ (答)

(2)

$h(x)=f(x)+g(x)$ ⋯⑪，$g(1)<0$ ⋯⑫, $g(2)>0$ ⋯⑬

⑩より，$f(1)=-\frac{163}{11}<0$ ⋯⑭, $f(2)=\frac{89}{44}>0$ ⋯⑮

⑪,⑫,⑬,⑭,⑮より，$h(1)<0$ ⋯⑯, $h(2)>0$ ⋯⑰ 題意より，$h(x)$は，$x>0$で微分可能であることから，$[1,2]$で連続である．故に，⑯，⑰と中間値の定理より，$1<x<2$の範囲に$h(x)=0$を満たす実数解が少なくとも 1 つ存在する．(証明終わり)

(3)

求める面積をSとする．②，⑩より，$f'(x)=2x+\frac{522}{11x^4}>0$ ⋯⑱, $f(1)=-\frac{163}{11}>-15$ ⋯⑲

⑱,⑲より，$1\leqq x\leqq 2$の範囲において，$f(x)>-15$
故に,

$$S=\int_1^2\left(x^2-\frac{174}{11x^3}+15\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{87}{11x^2}+15x\right]_1^2=\frac{1505}{132} \cdots(答)$$

令和4年度　前期日程　入学者選抜学力検査問題
環境・情報科学科　数学　配点

$\boxed{1}$

（1）２０点，　（2）２０点，　（3）６０点

$\boxed{2}$

（1）４０点，　（2）４０点，　（3）２０点

$\boxed{3}$

（1）２０点，　（2）３０点，　（3）３０点，　（4）２０点

$\boxed{4}$

（1）６０点，　（2）２０点，　（3）２０点

以上