令和3年度 前期日程 入学者選抜学力検査問題

数学(生命分子化学科・森林科学科)

$\boxed{1}$

(1)

① $3x-y \geqq 0,\ 3x+2y \geqq 0$ のとき　式を変形すると、$y \leqq 3x,\ y \geqq -\frac{3}{2}x$

このとき　$3x-y+3x+2y \leqq 3$　式を変形すると　$y \leqq -6x+3$

② $3x-y \geqq 0,\ 3x+2y < 0$ のとき　式を変形すると、$y \leqq 3x,\ y < -\frac{3}{2}x$

このとき　$3x-y-(3x+2y) \leqq 3$　式を変形すると　$-3y \leqq 3$　より　$y \geqq -1$

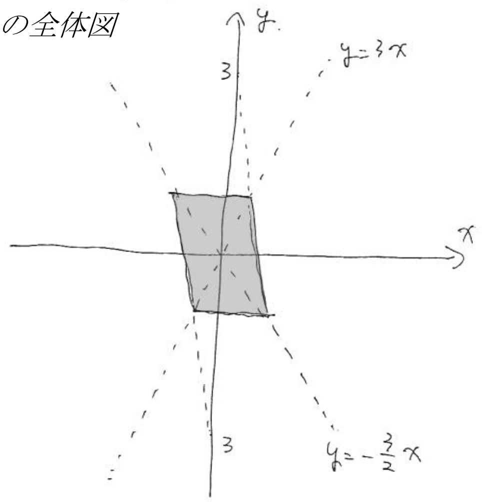
③ $3x-y < 0,\ 3x+2y \geqq 0$ のとき

式を変形すると、$y > 3x,\ y \geqq -\frac{3}{2}x$

このとき　$-(3x-y)+(3x+2y) \leqq 3$

式を変形すると　$3y \leqq 3$　より　$y \leqq 1$

領域 D の全体図



④ $3x-y < 0,\ 3x+2y < 0$ のとき

式を変形すると、$y > 3x,\ y < -\frac{3}{2}x$

このとき　$-(3x-y)-(3x+2y) \leqq 3$

式を変形すると　$-y \leqq 6x+3$　より $y \geqq -6x-3$

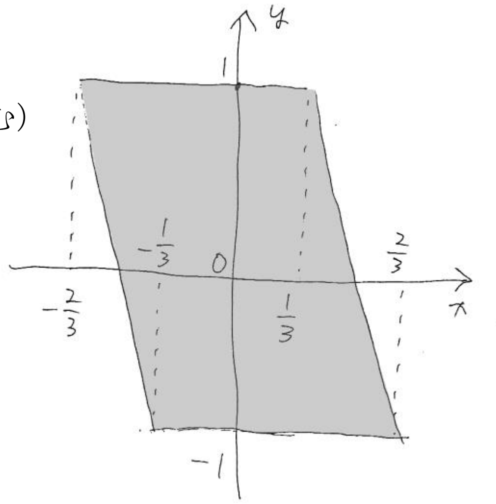
これらを図示すると領域 D は右図の内側部分(境界線含む)となる。ここで $11x+2y=a$ とおくと

$2y=-11x+a$ より　$y=-\frac{11}{2}x+\frac{a}{2}$

これは傾きが$-\frac{11}{2}$の直線なので，(x,y) が D を動く時

a が最小となるのは(x,y) が$(-\frac{1}{3},-1)$ のときである。

このとき $11x+2y=11\left(-\frac{1}{3}\right)+2(-1)=-\frac{17}{3}$



領域 D の拡大図

（２）

２次方程式　$x^2-4xy+7y^2+y-14=0$ の判別式を D とすると、

２次方程式が実数解を持つのは、

$\dfrac{D}{4}=(-2y)^2-(7y^2+y-14)\geqq 0$

よって

$3y^2+y-14\leqq 0$

$(3y+7)(y-2)\leqq 0$

$-\dfrac{7}{3}\leqq y\leqq 2$

これを満たす整数 y は、$y=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

これらを元の式に代入すると

① $y=2$ のとき、

$x^2-8x+16=0$

$(x-4)^2=0$

$\therefore x=4$

② $y=1$ のとき、

$x^2-4x-6=0$

したがって、x は整数とはならず不適。

③ $y=0$ のとき、

$x^2-14=0$

したがって、x は整数とはならず不適。

④ $y=-1$ のとき、

$x^2+4x-8=0$

したがって、x は整数とはならず不適。

⑤ $y=-2$ のとき、

$x^2+8x+12=0$

$(x+6)(x+2)=0$

$\therefore x=-2,\ -6$

よって

$(x,y)=(-6,-2)(-2,-2)(4,2)$

（３）

$a_{n+1}=3a_n+3^{n+2}$　の両辺を 3^{n+1} で割ると,

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{3a_n}{3\cdot 3^n}+\dfrac{3^{n+2}}{3^{n+1}}$

となるので、$b_n=\frac{a_n}{3^n}$ とおくと、$b_{n+1}=b_n+3$　で、$b_1=\frac{a_1}{3^1}=2$

したがって $\{b_n\}$ は、初項が２、公差が３の等差数列となる。
よって

$b_n=2+3(n-1)=3n-1$
$\therefore a_n=(3n-1)3^n$

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(3k-1)3^k=\sum_{k=1}^{n}(k\cdot 3^{k+1}-3^k)$$

ここで $S=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^{k+1}$ とおき、$S-3S$ を計算する。

$$\begin{aligned}
S&=1\cdot 3^2+2\cdot 3^3+3\cdot 3^4+4\cdot 3^5+\cdots\cdots+n\cdot 3^{n+1}\\
-3S&=\qquad\qquad 1\cdot 3^3+2\cdot 3^4+3\cdot 3^5+\cdots\cdots+(n-1)3^{n+1}+n\cdot 3^{n+2}\\
\hline
-2S&=1\cdot 3^2+1\cdot 3^3+1\cdot 3^4+1\cdot 3^5+\cdots\cdots+3^{n+1}-n\cdot 3^{n+2}
\end{aligned}$$

$$-2S=\frac{3^2(3^n-1)}{3-1}-n\cdot 3^{n+2}$$

$$=\frac{9(3^n-1)}{2}-n\cdot 3^{n+2}$$

$$S=-\frac{9}{4}(3^n-1)+\frac{n}{2}\cdot 3^{n+2}$$

$$=\frac{3}{4}(2n-1)3^{n+1}+\frac{9}{4}$$

また $\sum_{k=1}^{n} 3^k=\frac{3(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n+1}-3)$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{3}{4}(2n-1)3^{n+1}+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(3^{n+1}-3)$$

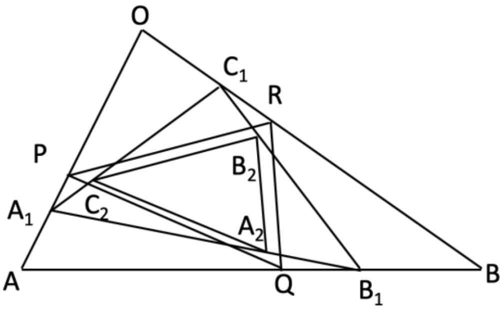
$$=\tfrac{1}{4}(6n-5)3^{n+1}+\tfrac{15}{4}$$

$\boxed{2}$

(1)　△OAB の重心と△PQR の重心が一致することから，

$\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\right)$

よって$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$ ---①



(2)　$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}$から同様に$t$ $(0\leqq t\leqq 1)$と
u $(0\leqq u\leqq 1)$を用いて表すと，①から，
$\vec{a}+\vec{b}=s\vec{a}+(1-t)\vec{a}+t\vec{b}+(1-u)\vec{b}$
これを整理すると，$(s-t)\vec{a}+(t-u)\vec{b}=\vec{0}$
$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0},\overrightarrow{OB}\neq\vec{0},\overrightarrow{OA}\nparallel\overrightarrow{OB}$(*平行でない*)$\left(\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\vec{a}\nparallel\vec{b}\right)$から　$s=t=u$

よって
$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\\ \overrightarrow{OR}&=(1-s)\vec{b}\end{aligned}\right\}②$$

(3) $\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{OC_2}-\overrightarrow{OB_2}$

$\overrightarrow{OB_2}=\frac{3\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OB_1}}{4}$　　$\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{4}\vec{b}$　　$\overrightarrow{OB_1}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$

$\therefore\ \overrightarrow{OB_2}=\frac{1}{4}\left(3\times\frac{\vec{b}}{4}+\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}\right)=\frac{1}{16}\left(\vec{a}+6\vec{b}\right)$　　---③

$\overrightarrow{OC_2}=\frac{3\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OC_1}}{4}$　　$\overrightarrow{OA_1}=\frac{3}{4}\vec{a}$　　$\overrightarrow{OC_1}=\frac{\vec{b}}{4}$

$\therefore\overrightarrow{OC_2}=\frac{1}{4}\left(3\times\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{\vec{b}}{4}\right)=\frac{1}{16}\left(9\vec{a}+\vec{b}\right)$　---④

③と④より

$\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{OC_2}-\overrightarrow{OB_2}=\frac{1}{16}\left(9\vec{a}+\vec{b}\right)-\frac{1}{16}\left(\vec{a}+6\vec{b}\right)=\frac{1}{16}\left(8\vec{a}-5\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{5}{16}\vec{b}$

②から $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(1-s)\vec{b}-s\vec{a}$　　よって$\overrightarrow{PR}=-s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$

$\therefore\overrightarrow{B_2C_2}$*と*$\overrightarrow{PR}$*が平行のとき,*

$x\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{PR}$（*$x$は実数*）で表せるため，$x(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{5}{16}\vec{b})=-s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\overrightarrow{OA}\nparallel\overrightarrow{OB}$(*平行でない*)であることから，

$\frac{1}{2}x=-s$ *そして*$-\frac{5}{16}x=1-s$

これを解くと $s=\frac{16}{26}=\frac{8}{13}$　　*これは*$0\leqq s\leqq 1$ *を満たす*（*なお*$x=-\frac{16}{13}$）

(4)　図の底辺と高さの比から

$\triangle OA_1C_1$：$\triangle OAC_1 = 3:4$

　$\triangle OAC_1$：$\triangle OAB = 1:4$　　　∴ $\triangle OA_1C_1$：$\triangle OAB = 3:16$　　⑤

同様に

$\triangle AB_1A_1$：$\triangle ABA_1 = 3:4$

　$\triangle ABA_1$：$\triangle OAB = 1:4$　　　∴ $\triangle AB_1A_1$：$\triangle OAB = 3:16$　　⑥

$\triangle BC_1B_1$：$\triangle BOB_1 = 3:4$

　$\triangle BOB_1$：$\triangle OAB = 1:4$　　　∴ $\triangle BC_1B_1$：$\triangle OAB = 3:16$　　⑦

$\triangle OAB = S$ とすると

$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle OAB - (\triangle OA_1C_1 + \triangle AB_1A_1 + \triangle BC_1B_1) = S - 3\times\frac{3}{16}S = \frac{7}{16}S$

従って$\triangle OAB$: $\triangle A_1B_1C_1 = S : \frac{7}{16}S = 16:7$

同様に、$\triangle A_1B_1C_1 : \triangle A_2B_2C_2 = 16:7$　　$\therefore \triangle OAB : \triangle A_2B_2C_2 = 16^2:7^2 = 256:49$ ---⑧

（別解）

$\triangle OA_1C_1$：$\triangle OAB = (\overline{OA_1}\times\overline{OC_1}) : (\overline{OA}\times\overline{OB}) = 3\times 1 : 4\times 4 = 3:16$

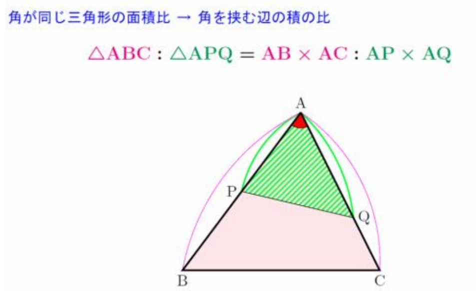
$\triangle AB_1A_1$：$\triangle OAB = (\overline{AB_1}\times\overline{AA_1}) : (\overline{AB}\times\overline{OA}) = 3\times 1 : 4\times 4 = 3:16$

$\triangle BC_1B_1$：$\triangle OAB = (\overline{BC_1}\times\overline{BB_1}) : (\overline{AB}\times\overline{OB}) = 3\times 1 : 4\times 4 = 3:16$

$\triangle OAB = S$ とすると

$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle OAB - (\triangle OA_1C_1 + \triangle AB_1A_1 + \triangle BC_1B_1)$

$= S - 3\times\frac{3}{16}S = \frac{7}{16}S$



従って$\triangle OAB$: $\triangle A_1B_1C_1 = S : \frac{7}{16}S = 16:7$

同様に、$\triangle A_1B_1C_1 : \triangle A_2B_2C_2 = 16:7$　　$\therefore \triangle OAB : \triangle A_2B_2C_2 = 16^2:7^2$

$= 256 : 49$---⑨

$\boxed{3}$ (1)

C_1を$f(x)$，C_3を$g(x)$とおく．$g(x)$は$f(x)$をx軸方向に 2，y軸方向に-4だけ平行移動した曲線であることから

$g(x) + 4 = -2(x-2)^2$

$g(x) = -2(x-2)^2 - 4 = -2(x^2 - 4x + 4) - 4 = -2x^2 + 8x - 12$ ・・・・①

$f'(x) = -4x$

$g'(x) = -4x + 8$

$f(x)$上の点を$(t, f(t))$，$g(x)$上の点を$(s, g(s))$する．

$f(x)$における接線の方程式は,

$y = f'(t)(x-t) + f(t) = -4t(x-t) - 2t^2 = -4tx + 4t^2 - 2t^2 = -4tx + 2t^2$ ・・・・ ②

同様に，$g(x)$における接線の方程式は

$y = g'(s)(x-s) + g(s) = (-4s+8)(x-s) - 2s^2 + 8s - 12 = (-4s+8)x - 8s + 4s^2 - 2s^2 + 8s - 12$

$= (-4s+8)x + 2s^2 - 12$ ・・・・③

②と③が同じ接線となることとから，それぞれの係数は等しくなる．よって,

$-4t = -4s + 8$ ・・・・④

$2t^2 = 2s^2 - 12$ ・・・・⑤

④より，$t = s - 2$．⑤に代入して整理すると,

$2(s-2)^2 = 2s^2 - 12$

$2(s^2 - 4s + 4) = 2s^2 - 12$

$-8s + 8 = -12$

$-8s = -20$

よって，$s = \frac{5}{2}$．$s = \frac{5}{2}$を③に代入すると,

$y = (-4s+8)x + 2s^2 - 12 = (-10+8)x + \frac{25}{2} - 12 = -2x + \frac{1}{2}$

以上より，求める直線は,

$$\therefore y = -2x + \frac{1}{2}$$

(2)

(1)で求めた直線と$f(x)$および$g(x)$との接点をそれぞれ$M(m, f(m))$，$N(n, g(n))$とする．

接点 N のx座標は，(1)より，$n = \frac{5}{2}$

接点 M のx座標は，(1)の④より，$m = n - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

また，$f(x)$と$g(x)$との交点のx座標は,

$2p^2 = 2p^2 - 8p + 12$

$8p = 12$

より，

$p=\frac{3}{2}$

面積S_1は，

$$S_1=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left\{\left(-2x+\frac{1}{2}\right)-(-2x^2)\right\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left\{\left(-2x+\frac{1}{2}\right)-(-2x^2+8x-12)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{2}{3}x^3-5x^2+\frac{25}{2}x\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}$$

$$=\left\{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{8}-\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{125}{8}-5\cdot\frac{25}{4}+\frac{25}{2}\cdot\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{8}-5\cdot\frac{9}{4}+\frac{25}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$=\left\{\left(\frac{54}{24}-\frac{6}{4}\right)-\left(\frac{2}{24}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{250}{24}-\frac{125}{4}+\frac{125}{4}\right)-\left(\frac{54}{24}-\frac{45}{4}+\frac{75}{4}\right)\right\}=-\frac{38}{24}+\frac{70}{24}=\frac{32}{24}=\frac{4}{3}$$

以上より，求める面積S_1は，

$$\therefore S_1=\frac{4}{3}$$

(3)

C_2を$h(x)$とする．C_2は$x=a$でx軸に接する．また，$f(x)$と$g(x)$の交点のx座標は$\frac{3}{2}$であることから，求める面積S_2は，$a>\frac{3}{2}$と$a<\frac{3}{2}$の２通りが考えられる．

i) $a>\frac{3}{2}$の場合，

$$S_2=\int_{\frac{3}{2}}^{a}h(x)dx=\int_{\frac{3}{2}}^{a}(x-a)^2dx=\int_{\frac{3}{2}}^{a}(x^2-2ax+a^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\right]_{\frac{3}{2}}^{a}=\left(\frac{1}{3}a^3-a^3+a^3\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}-\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}a^2\right)=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{9}{4}a-\frac{27}{24}=\frac{4}{3}$$

24 倍して整理すると，

$8a^3-36a^2+54a-27=32$

左辺を因数分解すると，

$(2a-3)^3=32$

$2a-3=\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{4\times2^3}=2\sqrt[3]{4}$

以上より，求めるaは，

$$\therefore a=\frac{3}{2}+\sqrt[3]{4}$$

ii) $a<\frac{3}{2}$の場合，

i）と同様に計算すると，

$$S_2=\int_{a}^{\frac{3}{2}}h(x)dx=\int_{a}^{\frac{3}{2}}(x-a)^2dx=\int_{a}^{\frac{3}{2}}(x^2-2ax+a^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\right]_{a}^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}-\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}a^2\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-a^3+a^3\right)=-\frac{1}{3}a^3+\frac{3}{2}a^2-\frac{9}{4}a+\frac{27}{24}=\frac{4}{3}$$

24倍して整理すると，

$-8a^3+36a^2-54a+27=32$

左辺を因数分解すると，

$(3-2a)^3=32$

$3-2a=\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{4\times 2^3}=2\sqrt[3]{4}$

以上より，求めるaは，

$$\therefore a=\frac{3}{2}-\sqrt[3]{4}$$

※

（$\sqrt[3]{4}=1.5874\cdots$）